

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۷۵

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی محض (جبر) ۱۱۱۰۴۱ - آمار ۱۱۱۰۸۸

۱- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \cap [a, b] \\ -1 & x \notin Q \cap [a, b] \end{cases}$ بر $[a, b]$ تعریف شده و α تابعی صعودی دلخواهی می باشد

کدام گزینه صحیح است؟

۲. $\int_a^b f d\alpha = \alpha(b) - \alpha(a)$

۱. $\int_a^b f d\alpha + \int_a^b f d\alpha = 0$

۴. $f \in R(\alpha)$

۳. $\int_a^b f d\alpha = \alpha(a) - \alpha(b)$

۲- اگر $\int_a^b f^2(x) dx = 2$ و $f(a) = f(b) = 0$ انگاه مقدار $\int_a^b x f(x) f'(x) dx$ برابرست با:

۴. $b-a$

۳. ۱

۲. ۲

۱. -۱

۳- تابع f بر $[a, b]$ مشتق پذیر است و $f^2(x) = \int_a^x f(t) dt$ ، کدام گزینه است؟

۴. $\frac{x}{2}$

۳. $2x$

۲. $x-a$

۱. $\frac{x-a}{2}$

۴- اگر P, Q دو افراز دلخواه از بازه $[a, b]$ و $P \subseteq Q$ باشند انگاه

۲. $L(P, f, \alpha) \geq L(Q, f, \alpha)$

۱. $U(P, f, \alpha) \leq U(Q, f, \alpha)$

۴. $U(p, f, \alpha) = L(Q, f, \alpha)$

۳. $L(Q, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$

۵- اگر $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ کدام گزینه صحیح است؟ $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}}$

۱. $\left| \int_a^b f g d\alpha \right| \geq \|f\|_2 \|g\|_2$

۲. $\|f + g\|_2 \geq \|f\|_2 + \|g\|_2$

۳. $\|f - h\|_2 \geq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2$

۴. برای هر $\epsilon > 0$ تابع پیوسته ای مانند Φ وجود دارد که $\|f - \Phi\|_2 < \epsilon$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۷۵

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی محض (جبر) ۱۱۱۱۰۴۱ - آمار ۱۱۱۱۰۸۸

۶-

اگر تابع f بر $[a, b]$ پیوسته و اکیدا صعودی باشد و $f(a) = A$ و $f(b) = B$ آنگاه $\int_a^b f(x)dx + \int_A^B f^{-1}(x)dx$ برابرست با:

۱. $Bb - Aa$ ۲. $AB - ab$ ۳. $Ba - Ab$ ۴. $ab - AB$

۷- کدامیک از انتگرالهای زیر به طور مطلق همگراست؟

۱. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ ۲. $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ ۳. $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ۴. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x+1} dx$

۸-

اگر به ازای هر عدد حقیقی T تابع f بر بازه $[a, T]$ انتگرال پذیر باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه $\int_a^{\infty} f$ موجود باشد آن است که

۱. $\forall \epsilon > 0 \exists T_0 \exists T_1, T_2 (T_2 \leq T_1 \leq T_0 \Rightarrow \left| \int_{T_1}^{T_2} f \right| < \epsilon)$ ۲. $\forall \epsilon > 0 \forall T_0 \forall T_1, T_2 (T_2 \geq T_1 \geq T_0 \Rightarrow \left| \int_{T_1}^{T_2} f \right| < \epsilon)$
۳. $\forall \epsilon > 0 \exists T_0 \forall T_1, T_2 (T_2 \leq T_1 \leq T_0 \Rightarrow \left| \int_{T_1}^{T_2} f \right| < \epsilon)$ ۴. $\forall \epsilon > 0 \forall T_0 \exists T_1, T_2 (T_2 \geq T_1 \geq T_0 \Rightarrow \left| \int_{T_1}^{T_2} f \right| < \epsilon)$

۹- تابع f بر بازه $[a, b]$ با تغییر کراندار است اگر و فقط اگر

۱. تفاضل دو تابع صعودی باشد. ۲. دارای مشتق کراندار باشد.
۳. یکنوا باشد. ۴. کراندار باشد.

۱۰- تابع f بر بازه $[a, b]$ با تغییر کراندار است و v_f تغییرات کلی تابع f را نشان می دهد. تابع V را چنین تعریف می کنیم:

$$V(x) = \begin{cases} v_f(a, x) & a < x \leq b \\ 0 & x = a \end{cases}$$

کدام گزینه صحیح است؟

۱. V بر $[a, b]$ نزولی است. ۲. $D = V - f$ بر $[a, b]$ صعودی است.
۳. V بر $[a, b]$ ثابت است. ۴. $D = V - f$ بر $[a, b]$ ثابت است.

۱۱- تابع f بر بازه $[a, b]$ در شرط یکنواخت لیبشیتز از مرتبه $\alpha > 0$ صدق میکند هرگاه

$$\exists M \forall x, y \left(|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha \right) \text{ اگر } \alpha = 1, \text{ آنگاه}$$

۱. f با تغییر کراندار است. ۲. f تابعی ثابت است.
۳. f با تغییر کراندار نیست. ۴. f پیوسته مطلق نیست.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۷۵

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی محض (جبر) ۱۱۱۰۴۱ - آمار ۱۱۱۰۸۸

۱۲- طول خم $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$ در بازه $[0, 2\pi]$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $2\pi - 1$ ۲. $\sqrt{2}\pi$ ۳. $2\sqrt{2}\pi$ ۴. 2π

۱۳- برای دنباله ی توابع $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$ بر بازه $[0, 1]$ ، مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx - \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$ برابرست با:

۱. موجود نیست. ۲. $+1$ ۳. صفر ۴. -1

۱۴- اگر $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دو دنباله از توابع حقیقی و به طور یکنواخت همگرا باشند، کدام یک از دنباله های زیر ممکن است به طور یکنواخت همگرا نباشد؟

۱. $\{f_n g_n\}$ ۲. $\{f_n - g_n\}$ ۳. $\{f_n + g_n\}$ ۴. $\{-f_n\}$

۱۵- سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \sin nx}{n^\alpha}$ بر بازه $[0, 1]$ به ازای چه مقادیری از α به طور یکنواخت همگراست؟

۱. $\alpha < 0$ ۲. $\alpha \geq 0$ ۳. $\alpha > 0$ ۴. $\alpha \leq 0$

۱۶- اگر X یک فضای متریک فشرده و A زیر جبری از $C_r(X)$ باشد، در چه صورت $\bar{A} = C_r(X)$ ؟

۱. A نقاط X را جدا کند. ۲. A نقاط X را جدا کند و X صفر نباشد.
۳. A خود الحاق باشد و X صفر نباشد. ۴. A خود الحاق باشد و نقاط X را جدا کند

۱۷- اگر X فشرده باشد و $f_n \in C(X)$ به طوری که نقطه وار کراندار و همپیوسته باشد، ان گاه $\{f_n\}$

۱. بر X به طور یکنواخت کراندار است. ۲. بر X به طور یکنواخت همگراست.
۳. بر X به طور یکنواخت کراندار و همگراست. ۴. بر X به طور یکنواخت همگرا و کراندار نیست

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۷۵

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی محض (جبر) ۱۱۱۰۴۱ - آمار ۱۱۱۰۸۸

۱۸- کدام گزینه صحیح نیست؟

۱. دو سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی یکسان هستند.

۲. دو سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ دارای شعاع همگرایی یکسان هستند.

۳. دو سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ دارای شعاع همگرایی یکسان هستند.

۴. دو سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ دارای شعاع همگرایی یکسان هستند.

۱۹- اگر شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برابر R باشد که در آن $R > 0$ ، شعاع همگرایی سری $y = \frac{x}{R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ برابر است با

۱. ۱ ۲. $\frac{1}{R}$ ۳. R^2 ۴. R

۲۰- تابع E را با ضابطه $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ در نظر بگیرید، کدام گزینه صحیح است؟

۱. E اکیدا نزولی است. ۲. E کراندار است. ۳. $E(1) = 1$ ۴. $E(nx) = (E(x))^n$

سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- الف) قضیه (اول مقدار میانگین) را فقط بیان کنید.

ب) (قضیه مشتق گیری) فرض کنید $f \in R(\alpha)$ و $(a \leq x \leq b)$ $F(x) = \int_a^x f d\alpha$ انگاه ثابت کنید،

۱) اگر α در x_0 پیوسته باشد، انگاه F در x_0 پیوسته است.

۲) اگر f در x_0 پیوسته و α در x_0 مشتق پذیر باشد، انگاه F در x_0 مشتق پذیر است و $F'(x_0) = f(x_0)\alpha'(x_0)$

۱.۴۰ نمره

۲- فرض کنید f بر (a, ∞) ($a > 0$) تعریف شده است، $1 < p$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\log x)^p f(x)$ موجود است ثابت کنید

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۷۵

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی محض (جبر) ۱۱۱۱۰۴۱ - آمار ۱۱۱۱۰۸۸

۱.۴۰ نمره
۳- شرط لازم و کافی برای آنکه $f_n \Rightarrow f$ یعنی f_n به طور یکنواخت همگرا به f بر E باشد آن است که
$$\sigma_n = \sup |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

۱.۴۰ نمره
۴- قضیه (دینی) را بیان و اثبات کنید.

۱.۴۰ نمره
۵- دنباله $\{f_n\}$ با ضابطه $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^\alpha}$ تعریف شده است. مطلوبست تعیین مقادیر α به طوری که این دنباله بر $[0, \infty)$ به طور یکنواخت همگرا باشد.