

تعداد سوالات: تستی: ۲۰، تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۵، تشریحی: ۷۵

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۶)

استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است

۱- فرض کنید تعداد تصادفات جاده ای سالیانه به طور متوسط ۱۲ باشد. احتمال آنکه در یک فصل حداقل یک تصادف رخ دهد چقدر است؟ (تعداد تصادفات دارای توزیع پواسون است)

۱. e^{-25} ۲. e^{-3} ۳. $1 - e^{-3}$ ۴. $1 - e^{-\frac{1}{4}}$

۲- اگر تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X به صورت $M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{5t} - e^{4t}}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$ باشد تابع مولد احتمال X کدام است؟

۱. $\frac{t}{\ln(t)}$ ۲. $\frac{5}{t^4}$ ۳. $\frac{t^5 - t^4}{\ln(t)}$ ۴. وجود ندارد

۳- فرض کنید X دارای توزیع نمایی با پارامتر ۱ باشد. اگر $X = x$ باشد Y دارای توزیع پواسون با پارامتر X است. مطلوب است محاسبه $P(Y=2)$ ؟

۱. $\frac{1}{8}$ ۲. $\frac{1}{2}$ ۳. $\frac{1}{4}$ ۴. صفر

۴- اگر $\{N(t); t \geq 0\}$ یک فرایند پواسون با پارامتر $\lambda = 2$ باشد مقدار $P(N(8) - N(5) = 2)$ کدام است؟

۱. $8e^{-2}$ ۲. $18e^{-6}$ ۳. $2e^{-2}$ ۴. $36e^{-8}$

۵- در یک فرایند حرکت براونی با پارامتر $\sigma^2 = 3$ ضریب همبستگی بین X_2 و X_9 چقدر است؟

۱. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۲. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}}$ ۳. $\frac{\sqrt{2}}{9}$ ۴. صفر

۶- اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع پواسون با پارامترهای به ترتیب λ_1 و λ_2 باشند توزیع شرطی X به شرط آنکه $X + Y$ معلوم باشد کدام گزینه است؟

۱. هندسی ۲. نمایی ۳. پواسون ۴. دو جمله ای

تعداد سوالات : تستی : ۲۰ تشریحی : ۵

زمان آزمون (دقیقه) : تستی : ۷۵ تشریحی : ۷۵

سری سوال : ۱ یک

عنوان درس : فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس : ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمارریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۶)

۷- در یک زنجیر ارنفست با $d=7$ اگر تعداد مهره های ظرف I برابر ۳ باشد احتمال آنکه بعد از یک مرحله انجام آزمایش تعداد مهره های این ظرف ۲ تا شود چقدر است؟

۱. $\frac{2}{7}$ ۲. $\frac{3}{7}$ ۳. $\frac{4}{7}$ ۴. صفر

۸- در زنجیر قدم زدن تصادفی اگر X_2 موقعیت متحرک پس از ۲ واحد زمان روی محور باشد مقدار $P(X_2=1)$ کدام است؟

۱. q^2 ۲. $2qr$ ۳. $2pq+r^2$ ۴. $2pr$

۹- در یک زنجیر مارکف با فضای حالت $L = \{0,1,2\}$ ، ماتریس احتمال انتقال $P =$ و توزیع آغازین

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

| | | | |
|---------|---------------|---------------|---------------|
| π_0 | ۰ | ۱ | ۲ |
| | $\frac{1}{6}$ | $\frac{3}{6}$ | $\frac{2}{6}$ |

مقدار $P(X_0=1 | X_1=1)$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{2}$ ۲. $\frac{3}{12}$ ۳. $\frac{1}{4}$ ۴. $\frac{1}{2}$

۱۰- در یک زنجیر قدم زدن تصادفی ساده احتمال اینکه با شروع از حالت صفر بعد از ۸ مرحله دوباره به نقطه صفر برسیم کدام است؟ $(p = \frac{1}{2})$

۱. $\frac{35}{70}$ ۲. $\frac{140}{256}$ ۳. $\frac{70}{256}$ ۴. $\frac{1}{140}$

۱۱- اگر y حالتی بازگشتی باشد کدام گزینه درست است؟

۱. اگر $f_{xy} = 0$ آنگاه $E_x\{N(y)\} = \infty$ ۲. $f_{yy} < 1$ ۳. به ازای هر x ، $P_x(N(y) = \infty) = \infty$ ۴. اگر $f_{xy} = 0$ آنگاه $E_x(N(y)) = 0$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰، تشریحی: ۵
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۷۵، تشریحی: ۷۵
سری سوال: ۱ یک
عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱
رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمارریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۶)

۱۲- اگر \mathcal{E} تعداد نوزادان هر فرد دارای توزیع هندسی به صورت $P(\mathcal{E} = k) = pq^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$ باشد احتمال انقراض نسل کدام است؟ ($p < q$)

۱. $\frac{p}{q}$ ۲. $\frac{q}{p}$ ۳. ۱ ۴. صفر

۱۳- در مسئله ورشکستگی قمارباز اگر سرمایه A برابر ۳ واحد و سرمایه B نیز ۴ واحد باشد و $p = q$ ، احتمال ورشکستگی A کدام است؟

۱. $\frac{3}{7}$ ۲. $\frac{2}{7}$ ۳. $\frac{1}{7}$ ۴. ۱

۱۴- فرض کنید تابع مولد احتمال تعداد نوزادان در یک فرایند شاخه ای به صورت $\varphi(s) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}s^2$ باشد. احتمال اینکه تعداد نوزادان نسل دوم این فرایند حداقل ۳ تا باشد کدام است؟

۱. $\frac{5}{27}$ ۲. $\frac{1}{27}$ ۳. $\frac{2}{27}$ ۴. $\frac{3}{27}$

۱۵- اگر π توزیع مانای یک زنجیر ارنفست با $d = 4$ باشد $\pi(2)$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{16}$ ۲. $\frac{3}{8}$ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. $\frac{2}{8}$

۱۶- کدام گزینه درست نمی باشد؟ ($m_x = E_x(T_x)$)

۱. اگر فضای حالت یک زنجیر مارکف متناهی باشد توزیع مانا وجود دارد.

۲. در یک زنجیر تحویلناپذیر و بازگشتی مثبت با توزیع مانای π همواره $\pi(x) = \frac{1}{m_x}$.

۳. اگر X یک حالت بازگشتی پوچ باشد، $\pi(x) = 0$.

۴. شرط لازم برای وجود توزیع مانا در یک زنجیر زادومرگ آن است که زنجیر گذرا نباشد.

تعداد سوالات : تستی : ۲۰ : تشریحی : ۵

زمان آزمون (دقیقه) : تستی : ۷۵ : تشریحی : ۷۵

سری سوال : ۱ : یک

عنوان درس : فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس : ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمارریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۶

- ۱۷

اگر X یکی از حالات یک زنجیر مارکف باشد طوری که $p_{xx} = 0$ ، $p_{xx}^{(2)} = \frac{1}{2}$ و $p_{xx}^{(3)} = \frac{1}{4}$ آنگاه دوره اوقات X کدام است؟

۱. ۲

۲. ۱

۳. ۶

۴. اطلاعات مسئله کافی نیست.

- ۱۸

شرط برای مارکفی بودن فرایند زمانهای توقف در زنجیر زمان - پیوسته ، آن است که توزیع زمانهای توقف نمایی باشد.

۱. لازم و کافی

۲. کافی

۳. لازم

۴. این دو به هم ارتباطی ندارند.

- ۱۹

پارامترهای بی نهایت کوچک یک زنجیر مارکف زمان پیوسته به صورت $q_{x,x+1} = 4$ ، $q_{x,x-2} = 3$ ، $q_{x,x+2} = 5$ و

بقیه q_{xy} ها جز در حالت $y = x$ صفر هستند. مقدار Q_{12} کدام است؟

۱. $\frac{4}{9}$

۲. $\frac{4}{12}$

۳. $\frac{1}{2}$

۴. صفر

تعداد سوالات : تستی : ۲۰ تشریحی : ۵

زمان آزمون (دقیقه) : تستی : ۷۵ تشریحی : ۷۵

سری سوال : ۱ یک

عنوان درس : فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس : ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمارریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۶

- ۲۰

اگر پارامترهای بی نهایت کوچک به صورت $q_{xy} = \begin{cases} \lambda_x & y = x+1 \\ \mu_x & y = x-1 \end{cases}$ باشد آنگاه q_x و Q_{xy} به ترتیب (از راست به

چپ) کدامند؟

$$Q_{xy} = \begin{cases} \frac{\lambda_x}{\lambda_x + \mu_x} & y = x+1 \\ \frac{\mu_x}{\lambda_x + \mu_x} & y = x-1 \end{cases} \quad \text{و} \quad -(\lambda_x + \mu_x) \quad .1$$

$$Q_{xy} = \begin{cases} \frac{\lambda_x}{\lambda_x + \mu_x} & y = x+1 \\ \frac{\mu_x}{\lambda_x + \mu_x} & y = x-1 \end{cases} \quad \text{و} \quad (\lambda_x + \mu_x) \quad .2$$

$$Q_{xy} = \begin{cases} \frac{\mu_x}{\lambda_x + \mu_x} & y = x+1 \\ \frac{\lambda_x}{\lambda_x + \mu_x} & y = x-1 \end{cases} \quad \text{و} \quad (\lambda_x + \mu_x) \quad .3$$

$$Q_{xy} = \begin{cases} \frac{\mu_x}{\lambda_x + \mu_x} & y = x+1 \\ \frac{\lambda_x}{\lambda_x + \mu_x} & y = x-1 \end{cases} \quad \text{و} \quad -(\lambda_x + \mu_x) \quad .4$$

تعداد سوالات : تستی : ۲۰ تشریحی : ۵

زمان آزمون (دقیقه) : تستی : ۷۵ تشریحی : ۷۵

سری سوال : ۱ یک

عنوان درس : فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس : ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۶)

سوالات تشریحی

۲۰۰ نمره

۱- زنجیر مارکوفی با فضای حالت $L = \{0,1,2,3,4\}$ دارای ماتریس احتمال انتقال زیر است:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

الف) آیا زنجیر تحویلناپذیر است؟ چرا؟

ب) $P_1(T_4 < \infty)$ کدام است؟

ج) احتمال جذب ۳ به دسته بازگشتی $\{0,1\}$ چقدر است؟

۱۰۰ نمره

۲- فرض کنید $L = \{0,1,2,\dots\}$ به ازای $x \neq 0, x \neq y$ ماتریس انتقال q_{xy} معادله پیشرو را

$$q_{xy} = \begin{cases} \lambda & y = x + 1 \\ \mu & y = 0 \\ 0 & 0.w. \end{cases}$$

نوشته و با استفاده از آن توزیع مانای زنجیر مارکوف زمان پیوسته را بدست آورید.

۱۰۰ نمره

۳- در زنجیر مارکوف با فضای حالت $L = \{1,2,3\}$ ماتریس احتمال انتقال $P =$ مطلوب است محاسبه

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1(T_{\{2,3\}} = 2)$$

۱۰۰ نمره

۴- در زنجیر مارکوفی با ماتریس $P =$ ثابت کنید زنجیر توزیع مانای یکتا دارد و آنرا بدست آورید.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$



تعداد سوالات : تستی : ۲۰ تشریحی : ۵

زمان آزمون (دقیقه) : تستی : ۷۵ تشریحی : ۷۵

سری سوال : ۱ یک

عنوان درس : فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس : ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۷۱۵۶

۲۰۰ نمره

۵- در فرایند زاد و مرگ فرض کنید $p_x = \frac{x+2}{2(x+1)}$ و $q_x = \frac{x}{2(x+1)}$ طوری که $x \geq 0$. زنجیر بازگشتی

است یا خیر؟ چرا؟